Cvičení ze stochastické analýzy

1. Lévyho proces, Wienerův, Poissonův

Buď $(\mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$ filtrace na $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Řekneme, že proces $S_n \in \mathbb{A}(\mathcal{F}_n)$ je ***$\mathcal{F}_n$-náhodná procházka***, pokud $X_n = S_n - S_{n-1} \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_{n-1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ jsou stejně rozdělené.

(1) Buď S_n $\mathcal{F}_n$-náhodná procházka. Za jakých předpokladů je následující proces $\mathcal{F}_n$-martingal (super/sub) ?
   (a) S_n
   (b) $S_n^2 - n\sigma^2$ pro nějaké $\sigma^2 \in [0, \infty)$
   (c) $\exp\{\alpha S_n - \beta n\}$ pro nějaké $\beta \in \mathbb{R}$, je-li $\alpha \in \mathbb{R}$ dáno.

Buď $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ filtrace na $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Řekneme, že $L_t \in \mathbb{A}(\mathcal{F}_t)$ se zprava spojitými trajektoriemi startující z $L_0 = 0$ je ***$\mathcal{F}_t$-Lévyho proces***, pokud $L_t - L_s \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_s$ pro $0 \leq s \leq t$ a tyto přírůstky $L_t - L_s$ jsou homogenní, tj. $L_t - L_s \sim L_{t-s}$.

(2) Buď L_t $\mathcal{F}_t$-Lévyho proces. Za jakých předpokladů je následující proces $\mathcal{F}_n$-martingal ?
   (a) L_t
   (b) $L_t^2 - \sigma^2 t$ pro nějaké $\sigma^2 \in [0, \infty)$
   (c) $\exp\{\alpha L_t - \beta t\}$ pro nějaké $\beta \in \mathbb{R}$, je-li $\alpha \in \mathbb{R}$ dáno.

(3) Buď L_t $\mathcal{F}_t$-Lévyho proces a $\mathcal{G}_t$ filtrace nezávislá s filtrací $\mathcal{F}_t$, tj. $\mathcal{F}_\infty \perp\!\!\!\perp \mathcal{G}_\infty$. Ukažte, že pak L_t je také $\mathcal{F}_t \vee \mathcal{G}_t$-Lévyho proces.

(4) Buď L_t $\mathcal{F}_t$-Lévyho proces, N_t $\mathcal{G}_t$-Lévyho proces. Nechť $\mathcal{F}_\infty \perp\!\!\!\perp \mathcal{G}_\infty$ a $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Ukažte, že pak $M_t = \alpha L_t + \beta N_t$ je $\mathcal{F}_t \vee \mathcal{G}_t$-Lévyho proces.

Buďte W_t, N_t $\mathcal{F}_t$-Lévyho procesy. Řekneme, že W_t je ***$\mathcal{F}_t$-Wienerův proces***, pokud má spojité trajektorie a $W_t - W_s \sim N(0, t-s)$ pro $0 \leq s \leq t$. Podobně řekeneme, že N_t je ***$\mathcal{F}_t$-Poissonův proces***, pokud je jednoduchým čítačím procesem, tj. N_t nabývá pouze celočíselných hodnot a $N_t - N_{t-} \in \{0, 1\}, t \geq 0$, a pokud $N_t - N_s \sim \mathtt{Po}(\lambda(t-s))$ pro nějaké $\lambda > 0$, přičemž hodnotu λ nazýváme jeho ***intenzitou***.

Konstrukce: Buď $(\tau_n)_{n=0}^{\infty}$ náhodná procházka s kladnými kroky $0 < X_n = \tau_n - \tau_{n-1} \sim \Gamma(\lambda, 1)$. Pak $N_t = \sum_{k=1}^{\infty} 1_{[\tau_n \leq t]}$ je $\mathcal{F}_t^{N_t}$-Poissonův proces s intenzitou $\lambda > 0$.

(5) Buď N_t $\mathcal{F}_t$-Poissonův proces a $(S_n)_{n=0}^{\infty}$ náhodná procházka nezávislá s $\mathcal{F}_\infty$. Ukažte, že proces $L_t = S_{N_t}$ je $\mathcal{F}_t^L$-Lévyho proces. Tento proces nazveme ***složeným Poissonovým procesem***.

   Návod: Ukažte, že $E[\exp\{ix(L_t - L_s)\} | N_s = k, X_1, \ldots, X_k] \overset{\text{sj}}{=} \exp\{\lambda(t-s)(Ee^{ixS_1} - 1)\}$. Uvažujte
   $$\mathcal{G}_t \triangleq \mathcal{F}_t \vee \sigma([N_t = k, X_1 > x_1, \ldots, X_k > x_k]; x \in \mathbb{R}^k, k \in \mathbb{N}_0).$$

(6) Buď L_t $\mathcal{F}_t^L$-Lévyho proces. Ukažte, že také $M_t = \alpha L_{\beta t}$ je také $\mathcal{F}_t^M$-Lévyho proces pro $\alpha \in \mathbb{R}, \beta \geq 0$. Buď W_t Wienerův proces, ukažte, že $\frac{1}{\sigma} W(\sigma^2 t)$ je také Wienerův pro $\sigma > 0$.

(7) Buď W_t Wienerův proces, spočtěte jeho autokovarianční funkci $\operatorname{cov}(W_s, W_t)$ a ukažte, že každý gausovský proces $(X_t)_{t \geq 0}$ startující z $X_0 = 0$ se spojitými trajektoriemi a kovarianční strukturou $\operatorname{cov}(X_s, X_t) = s \wedge t$ je Wienerův.

(8) Rozhodněte, zda existuje Wienerův proces W_t takový, že $B_t = tW_{1/t}$ je opět Wienerův, kde $0 \cdot ? \triangleq 0$. Rozhodněte, zda existuje Wienerův proces W_t takový, že B_t není Wienerův.

(9) Buď $W = (W^{(1)}, \ldots, W^{(d)})$ ***n-dimenzionální Wienerův proces***, což znamená, že $W^{(1)}, \ldots, W^{(d)}$ jsou nezávislé Wienerovy procesy. Pro jaké $\lambda \in \mathbb{R}^d$ je proces $B_t = \lambda^\intercal W_t$ opět Wienerův. Pro jaké $A \in \mathbb{R}^{k \times d}$ je proces $V_t = AW_t$ opět k-dimenzionální Wienerův ?